Vectores tridimensionales

En este apéndice se presenta un resúmen de las relaciones vectoriales que son referenciados en este libro.

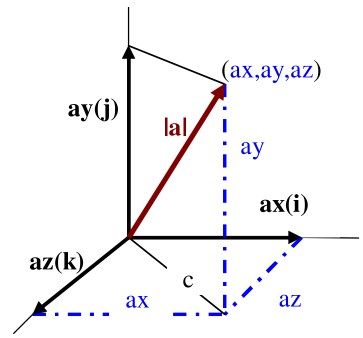


Fig. V-1

Simbología (Ver Fig. V-1)**:**

$$\vec{a} = (ax \cdot i + ay \cdot j + az \cdot k)$$

$$\vec{b} = (bx \cdot i + by \cdot j + bz \cdot k)$$

Donde:

$\vec{a}$ $\vec{b}$ son cantidades vectoriales

(ax, ay, az) son las coordenadas en los ejes "X", "Y" y "Z"

(i, j, k) son los vectores unitarios en los ejes "X", "Y" y "Z"

$\left|\vec{a}\right|$ es la magnitud del vector.

Vectores unitarios:

$$i = \frac{ax}{\left|\vec{a}\right|} \qquad j = \frac{ay}{\left|\vec{a}\right|} \qquad k = \frac{az}{\left|\vec{a}\right|}$$

Magnitud del vector:

1.- Primero, calcular "c" trigonométricamente:

$$c^2 = ax^2 + az^2$$

2.- Luego, calcular trigonométricamente.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{c^2 + ay^2}$$

3.- Al último, Sustituyendo "c":

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{ax^2 + az^2 + ay^2}$$

Ángulos respecto a los ejes:

Respecto al eje "X": θx $\qquad \mathrm{Cos}(\theta x) = \dfrac{ax}{\left|\vec{a}\right|} = i$

Respecto al eje "Y": θy $\qquad \mathrm{Cos}(\theta y) = \dfrac{ay}{\left|\vec{a}\right|} = j$

Respecto al eje "Z": θz $\qquad \mathrm{Cos}(\theta z) = \dfrac{az}{\left|\vec{a}\right|} = k$

Coordenadas del vector:

$$ax = \left|\vec{a}\right| \cdot \mathrm{Cos}(\theta x)$$

$$ay = \left|\vec{a}\right| \cdot \mathrm{Cos}(\theta y)$$

$$az = \left|\vec{a}\right| \cdot \mathrm{Cos}(\theta z)$$

Suma y resta de vectores

Se suman o se restan las coordenadas que se encuentran en el mismo eje:

$$\vec{a} + \vec{b} = (ax \cdot i + ay \cdot j + az \cdot k) + (bx \cdot i + by \cdot j + bz \cdot k)$$

Coordenada en el eje "X": (i): $ax + bx$

Coordenada en el eje "Y": (j): $ay + by$

Coordenada en el eje "Z": (k): $az + bz$

$$\vec{a} + \vec{b} = (ax + bx) \cdot i + (ay + by) \cdot j + (az + bz)k$$

Además si: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $\qquad (ax + bx) = cx$

$(ay + by) = cy$

$$(az + bz) = cz$$

$$\vec{c} = cx \cdot i + cy \cdot j + cz \cdot k$$

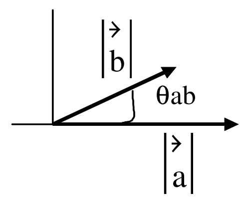
Multiplicación de vectores

A) Producto Punto (Producto escalar): $\vec{a} \cdot \vec{b}$

B) Producto Cruz (Producto vectorial): $\vec{a} \times \vec{b}$

A) Producto Punto (Producto escalar).- El resultado que se obtiene de este producto es un valor escalar.

La operación se puede efectuar a partir de los datos disponibles de los vectores:



1.- Conociendo las 2 magnitudes y el ángulo (θab) entre los dos vectores, se puede usar la siguiente expresión:

Fig. V-2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left(|\vec{b}| \cdot Cos(\theta ab) \right)$$

Donde:

$$|\vec{b}| \cdot Cos(\theta ab)$$

Es el componente del vector (b) en la dirección del vector (a); o sea la proyección de uno de los vectores sobre el otro. El resultado escalar que se obtiene tendrá su signo según el valor del ángulo (θab). Ver. Fig. V-2.

Si: $\theta ab < \frac{\pi}{2}$ El resultado es positivo $\pi = 180o$

Si: $\theta ab > \frac{\pi}{2}$ El resultado es negativo

Si: $\theta ab = \frac{\pi}{2}$ El resultado es cero

2.- Conociendo las coordenadas (ax,ay,az), (bx,by,bz) de los vectores (a) y (b) respectivamente, se puede usar la siguiente expresión:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (ax \cdot i + ay \cdot j + az \cdot k) \cdot (bx \cdot i + by \cdot j + bz \cdot k)$$

Desarrollando el producto y aplicando las reglas de los vectores unitarios siguientes:

$$\begin{array}{lll} i\cdot i = 1 & j\cdot j = 1 & k\cdot k = 1 \\ i\cdot j = 0 & j\cdot j = 0 & k\cdot j = 0 \\ i\cdot k = 0 & j\cdot k = 0 & k\cdot k = 0 \end{array}$$

Se obtiene:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (ax\cdot bx) + (ay\cdot by) + (az\cdot bz)$$

Además debe observarse la aplicación de las siguientes propiedades:

Conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

Distributiva: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

No Asociativa: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \neq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Aplicaciones:

Tiene su aplicación en el desarrollo de las siguientes magnitudes físicas:

Trabajo (W).- Es el producto punto de dos vectores: Fuerza (F) y desplazamiento (dS) en la dirección del movimiento:

$$W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \left|\overrightarrow{dS}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\mathrm{Cos}(\theta)$$

Gasto volumétrico (Q).- Es el producto punto de dos vectores: Elemento de área (dA) y velocidad de flujo (v) en la dirección del movimiento:

$$Q = \overrightarrow{dA}\cdot\vec{v} = \left|\vec{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{dA}\right|\cdot\mathrm{Cos}(\theta)$$

B) Producto Cruz (Producto vectorial).- El resultado que se obtiene de este producto es otro vector, perpendicular al plano de los vectores multiplicandos, y su sentido se determina con la regla de la mano derecha.

La operación se puede efectuar a partir de los datos disponibles de los vectores:

1.- Conociendo las magnitudes de los vectores (a) y (b) y el ángulo (θab) entre los dos vectores, se puede usar la siguiente expresión:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \mathrm{Sen}(\theta ab)$$

Donde: $\left|\vec{b}\right| \cdot \mathrm{Sen}(\theta ab)$

Es el componente del vector (b) en la dirección del vector (a); o sea la proyección de uno de los vectores sobre el otro. El resultado es otro vector perpendicular al plano de los vectores multiplicandos y su sentido se determina con la regla de la mano derecha.

Si: $\theta ab = \frac{\pi}{2}$ El resultado es cero $\pi = 180o$

Si: $\theta ab = \pi$ El resultado es cero

O sea que el resultado es cero cuando los vectores son colineales.

2.- Conociendo las coordenadas (ax,ay,az), (bx,by,bz) de los vectores (a) y (b) respectivamente, se puede usar la siguiente expresión:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (ax \cdot i + ay \cdot j + az \cdot k) \times (bx \cdot i + by \cdot j + bz \cdot k)$$

Desarrollando el producto y aplicando las reglas de los vectores unitarios siguientes (Ver. Fig. V-3):

$$i \times j = (k) \qquad j \times k = i \qquad k \times i = j$$

$$j \times i = (-k) \qquad k \times j = (-i) \qquad k \times j = (-j)$$

$$i \times i = 0 \qquad j \times j = 0 \qquad k \times k = 0$$

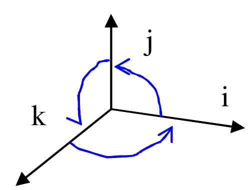


Fig. V-3

Se obtiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (ax \cdot bx) \cdot i \times i + (ax \cdot by) \cdot i \times j + (ax \cdot bz) \cdot i \times k + .$$
$$(ay \cdot bx) \cdot j \cdot i + (ay \cdot by) \cdot j \cdot j + (ay \cdot bz) \cdot j \cdot k + .$$
$$(az \cdot bx) \cdot k \cdot i + (az \cdot by) \cdot k \cdot j + (az \cdot by) \cdot k \cdot k$$

Simplificando:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (ax \cdot by) \cdot (k) + (ax \cdot bz) \cdot (-j) + (ay \cdot bx) \cdot (-k) + (ay \cdot bz) \cdot (i) + .$$
$$(az \cdot bx) \cdot (j) + (az \cdot by) \cdot (-i)$$

Agrupando o sumando los del mismo eje:

Coordenada en el eje "X": (i): $ay \cdot bz - az \cdot by$

Coordenada en el eje "Y": (j): $az \cdot bx - ax \cdot bz$

Coordenada en el eje "Z": (k): $ax \cdot by - ay \cdot bx$

Finalmente:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (ay \cdot bz - az \cdot by) \cdot i + (az \cdot bx - ax \cdot bz) \cdot j + (ax \cdot by - ay \cdot bx) \cdot k$$

También se puede obtener el producto cruz por el método de determinantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{pmatrix}$$

Se obtiene el mismo resultado:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (ay \cdot bz - az \cdot by) \cdot i + (az \cdot bx - ax \cdot bz) \cdot j + (ax \cdot by - ay \cdot bx) \cdot k$$

Además, cualquiera que sea el método de multiplicación, debe observarse la aplicación de las siguientes propiedades:

No Conmutativa: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

Distributiva: $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

No Asociativa: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

Aplicación:

Tiene su aplicación en el desarrollo de la siguiente magnitud física:

Momento de fuerza (Mo).- Es el producto cruz de dos vectores: vector fuerza (F) y vector de posición (r):

$$Mo = \vec{F} \times \vec{r} = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot Sen(\theta)$$

*